

第4节 整体换元法的应用 (★★★)

强化训练

类型 I：三角函数的基本性质

1. (2022·安徽合肥二模·★★) 将函数 $y = \sin x$ 的图象上各点横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ ，再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个

单位长度得到函数 $y = f(x)$ 的图象，当 $x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ 时， $f(x)$ 的值域为 ()

- (A) $[-1, 1]$ (B) $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ (C) $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$ (D) $[-\frac{1}{2}, 1]$

答案：C

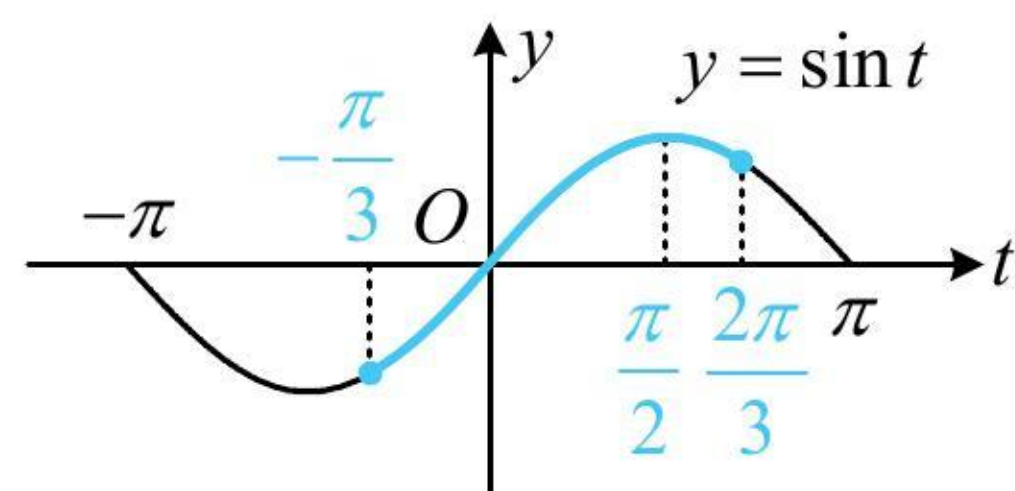
解析：将 $y = \sin x$ 横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ ，得到 $y = \sin 2x$ ，

再左移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到 $y = \sin 2(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ ，所以 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ ，

要求 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ 上的值域，可将 $2x + \frac{\pi}{3}$ 换元成 t ，借助 $y = \sin t$ 的图象来分析，

令 $t = 2x + \frac{\pi}{3}$ ，则 $f(x) = \sin t$ ，当 $x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ 时， $t \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ ，函数 $y = \sin t$ 的部分图象如图所示，

由图可知， $f(x)_{\min} = \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $f(x)_{\max} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ ，所以 $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$ 。



2. (★★) 设 $f(x) = 2\sin x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x + \sqrt{3}$ ($x \in \mathbf{R}$)，则不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集为_____。

答案： $[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{7\pi}{12}]$ ($k \in \mathbf{Z}$)

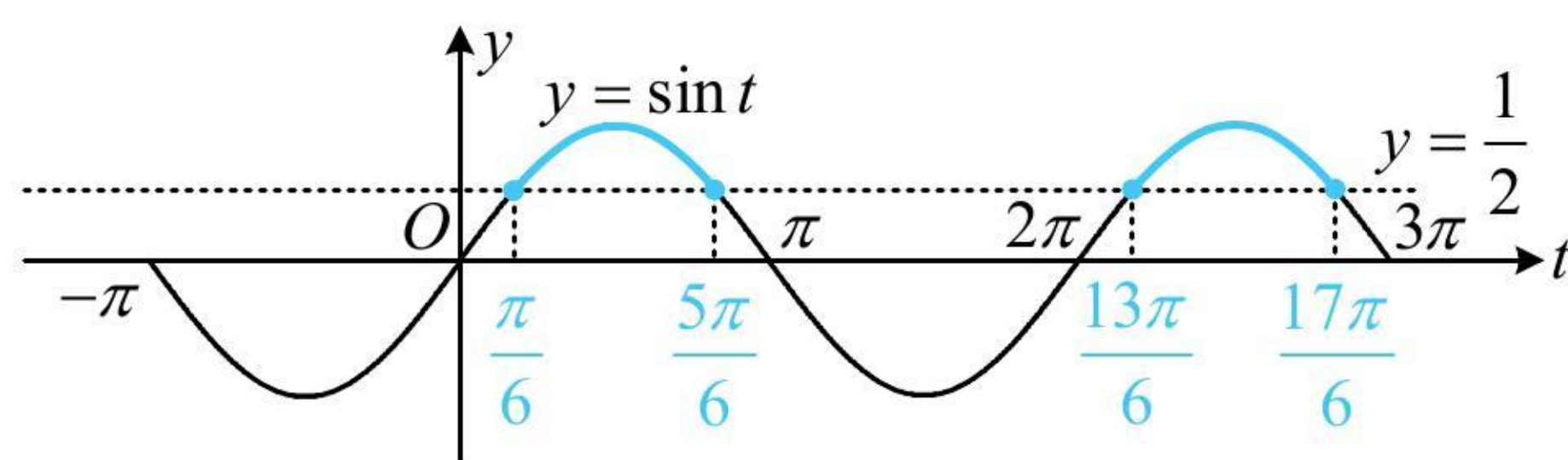
解析：先把 $f(x)$ 的解析式化简， $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3}(2\cos^2 x - 1) = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ ，

所以 $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) \geq \frac{1}{2}$ ，要解此不等式，可将 $2x - \frac{\pi}{3}$ 换元成 t ，借助 $y = \sin t$ 的图象来分析，

设 $t = 2x - \frac{\pi}{3}$ ，则 $\sin t \geq \frac{1}{2}$ ，如图，由图可知在 $[-\pi, \pi]$ 这个周期内， $\sin t \geq \frac{1}{2}$ 的解集为 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ ，

所以不等式 $\sin t \geq \frac{1}{2}$ 在 \mathbf{R} 上的解集为 $[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}]$ ，从而 $2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ，

故 $k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{7\pi}{12}$, 即原不等式的解集为 $[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{7\pi}{12}] (k \in \mathbf{Z})$.



3. (2022 · 安徽黄山模拟 · ★★) 函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 在 $[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}]$ 上的单调递增区间是_____.

答案: $[\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}]$

解析: 先将 $2x + \frac{\pi}{4}$ 换元成 t , 借助 $y = \sin t$ 的图象来分析单调性,

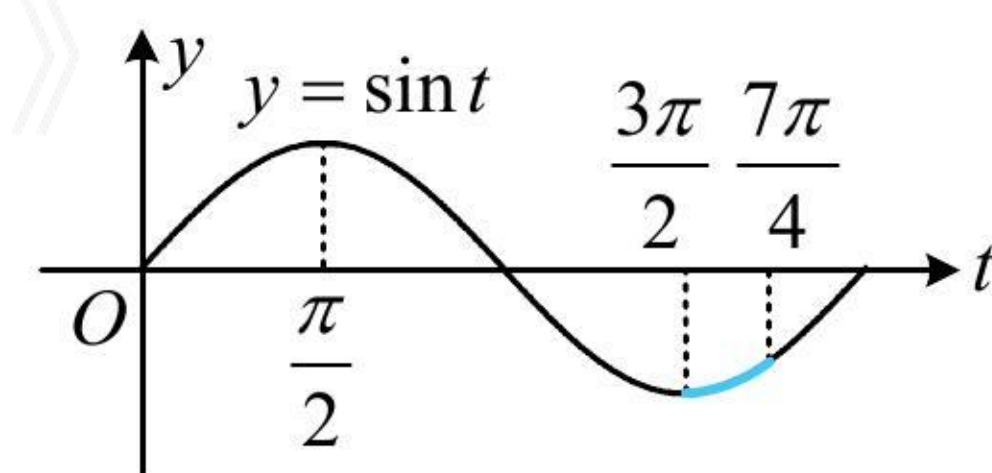
令 $t = 2x + \frac{\pi}{4}$, 则 $f(x) = \sin t$, 当 $x \in [\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}]$ 时, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}]$,

要求 $f(x)$ 的增区间, 只需寻找函数 $y = \sin t$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}]$ 上的增区间,

如图, 函数 $y = \sin t$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上 \searrow , 在 $[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}]$ 上 \nearrow ,

所以令 $\frac{3\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4}$ 可得: $\frac{5\pi}{8} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$, 故 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}]$ 上的单调递增区间是 $[\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}]$.

《一数·高考数学核心方法》



4. (2022 · 陕西宝鸡模拟 · ★★) 函数 $y = \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ 的单调递减区间是 ()

- (A) $[k\pi - \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{3\pi}{8}] (k \in \mathbf{Z})$
- (B) $[2k\pi - \frac{\pi}{8}, 2k\pi + \frac{3\pi}{8}] (k \in \mathbf{Z})$
- (C) $[2k\pi + \frac{3\pi}{8}, 2k\pi + \frac{7\pi}{8}] (k \in \mathbf{Z})$
- (D) $[k\pi + \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{7\pi}{8}] (k \in \mathbf{Z})$

答案: A

解法 1: 解析式中 x 的系数为负, 习惯上一般先用诱导公式化负为正, 可用 $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ 来化,

由题意, $f(x) = \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = -\sin(2x - \frac{\pi}{4})$, 要求 $f(x)$ 的减区间, 只需求 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ 的增区间,

令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 可得: $k\pi - \frac{\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{8}$, 故 $f(x)$ 的减区间是 $[k\pi - \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{3\pi}{8}] (k \in \mathbf{Z})$.

解法 2: 我们也可以用 $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ 来将 x 的系数化负为正,

由题意, $f(x) = \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = \sin[\pi - (\frac{\pi}{4} - 2x)] = \sin(2x + \frac{3\pi}{4})$,

令 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{3\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 可得: $k\pi - \frac{\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{8}$, 故 $f(x)$ 的减区间是 $[k\pi - \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{3\pi}{8}] (k \in \mathbf{Z})$.

5. (2022 · 宁夏银川模拟 · ★★) 已知函数 $g(x) = \cos x + \sin x$, $h(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \pi)$, 设

$f(x) = g(x - \frac{\pi}{6})h(x - \frac{\pi}{6})$, 则 $f(x)$ 的单调递增区间是 ()

- (A) $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}] (k \in \mathbf{Z})$
- (B) $[k\pi + \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{11\pi}{12}] (k \in \mathbf{Z})$
- (C) $[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}] (k \in \mathbf{Z})$
- (D) $[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}] (k \in \mathbf{Z})$

答案: A

解析: 先写出 $f(x)$ 的解析式并化简, 由题意, $h(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \pi) = \cos x - \sin x$,

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x - \frac{\pi}{6})h(x - \frac{\pi}{6}) = [\cos(x - \frac{\pi}{6}) + \sin(x - \frac{\pi}{6})][\cos(x - \frac{\pi}{6}) - \sin(x - \frac{\pi}{6})] \\ &= \cos^2(x - \frac{\pi}{6}) - \sin^2(x - \frac{\pi}{6}) = \cos(2x - \frac{\pi}{3}), \end{aligned}$$

要求 $f(x)$ 的单调递增区间, 可将 $2x - \frac{\pi}{3}$ 换元成 t , 借助复合函数同增异减准则来分析,

令 $t = 2x - \frac{\pi}{3}$, 则 $f(x) = \cos t$, $y = f(x)$ 是由外层的 $y = \cos t$ 和内层的 $t = 2x - \frac{\pi}{3}$ 复合而成, 内层显然 ↗, 故

要求 $f(x)$ 的增区间, 应先求外层 $y = \cos t$ 的增区间,

因为 $y = \cos t$ 的增区间是 $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$, 所以令 $2k\pi - \pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi$ 可得: $k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}$,

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}] (k \in \mathbf{Z})$.

【反思】 函数 $y = \cos(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$ 的单调递增区间应由不等式 $2k\pi - \pi \leq \omega x + \varphi \leq 2k\pi$ 来求, 单调递减区间应由不等式 $2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq 2k\pi + \pi$ 来求.

6. (★★★) (多选) 已知函数 $f(x) = \tan(2x - \frac{\pi}{3})$, 则下列说法正确的是 ()

- (A) 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$
- (B) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}\}$
- (C) 点 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心

(D) $f(x)$ 的单调递增区间是 $(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) (k \in \mathbf{Z})$

答案: ABC

解析: A 项, 函数 $y = \tan(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{|\omega|}$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{\pi}{2}$, 故 A 项正确;

B 项, 求正切的角不能是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍, 可由此求定义域, 由 $2x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ 可得 $x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}$,

所以 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}\}$, 故 B 项正确;

C 项, 要判断 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ 是否为对称中心, 就看当 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, $2x - \frac{\pi}{3}$ 是否为 $\frac{\pi}{2}$ 的整数倍,

当 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 故 C 项正确;

D 项, 令 $k\pi - \frac{\pi}{2} < 2x - \frac{\pi}{3} < k\pi + \frac{\pi}{2}$ 可得 $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} < x < \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}) (k \in \mathbf{Z})$, 故 D 项错误.

7. (2022 · 广东模拟 · ★★★★★) (多选) 将函数 $f(x) = \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x + 1$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 ()

(A) $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{9}$ 对称

(B) $g(x)$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{3}$

(C) $g(x)$ 的图象关于 $(\frac{11\pi}{18}, 1)$ 对称

(D) $g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{9}]$ 上单调递减

答案: BCD

解析: 由题意, $f(x) = \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x + 1 = 2 \sin(3x - \frac{\pi}{3}) + 1$,

$g(x) = f(x + \frac{\pi}{6}) = 2 \sin[3(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{3}] + 1 = 2 \sin(3x + \frac{\pi}{6}) + 1$,

A 项, 要判断 $x = \frac{5\pi}{9}$ 是否为对称轴, 只需判断 $\frac{5\pi}{9}$ 是否为 $\sin(3x + \frac{\pi}{6})$ 的最值点,

当 $x = \frac{5\pi}{9}$ 时, $\sin(3 \times \frac{5\pi}{9} + \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{11\pi}{6} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \neq \pm 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9}$ 不是 $g(x)$ 的对称轴,

故 A 项错误;

B 项, $g(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{3}$, 故 B 项正确;

C 项, 要判断 $(\frac{11\pi}{18}, 1)$ 是否为对称中心, 只需判断 $\frac{11\pi}{18}$ 是否为 $\sin(3x + \frac{\pi}{6})$ 的零点,

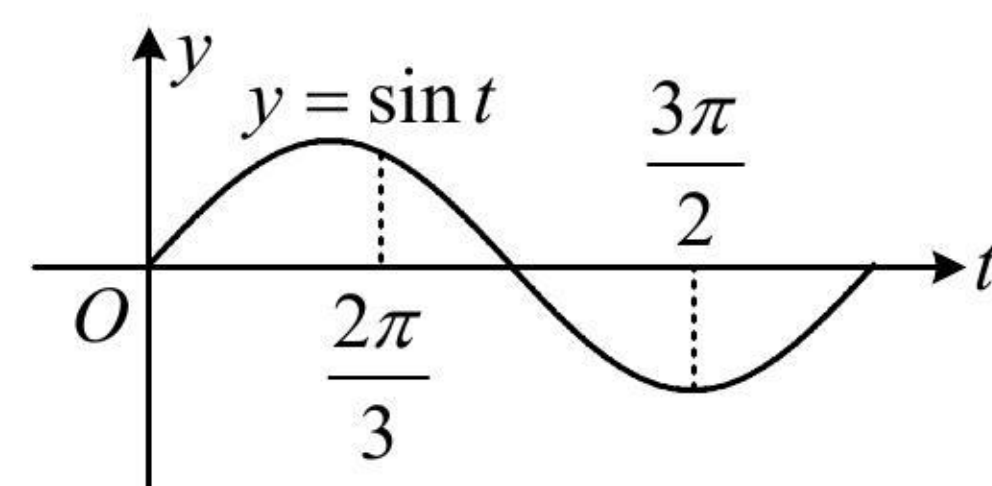
当 $x = \frac{11\pi}{18}$ 时, $\sin(3 \times \frac{11\pi}{18} + \frac{\pi}{6}) = \sin 2\pi = 0 \Rightarrow (\frac{11\pi}{18}, 1)$ 是 $g(x)$ 图象的对称中心, 故 C 项正确;

D 项, 可将 $3x + \frac{\pi}{6}$ 换元成 t , 转化为研究 $y = 2\sin t + 1$ 的单调性, 因为 $y = 2\sin t + 1$ 与 $y = \sin t$ 的单调性相同,

所以可画 $y = \sin t$ 的图象来看,

设 $t = 3x + \frac{\pi}{6}$, 则 $f(x) = 2\sin t + 1$, 当 $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{9}]$ 时, $t \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}]$,

如图, $y = \sin t$ 在 $[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}]$ 上 \searrow , 所以 $g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{9}]$ 上 \searrow , 故 D 项正确.



类型 II: 含参的单调性相关问题

8. (2022 · 浙江开学改 · ★★) 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \frac{3\pi}{4}) (\omega > 0)$ 在区间 $(0, 1)$ 上不可能 ()

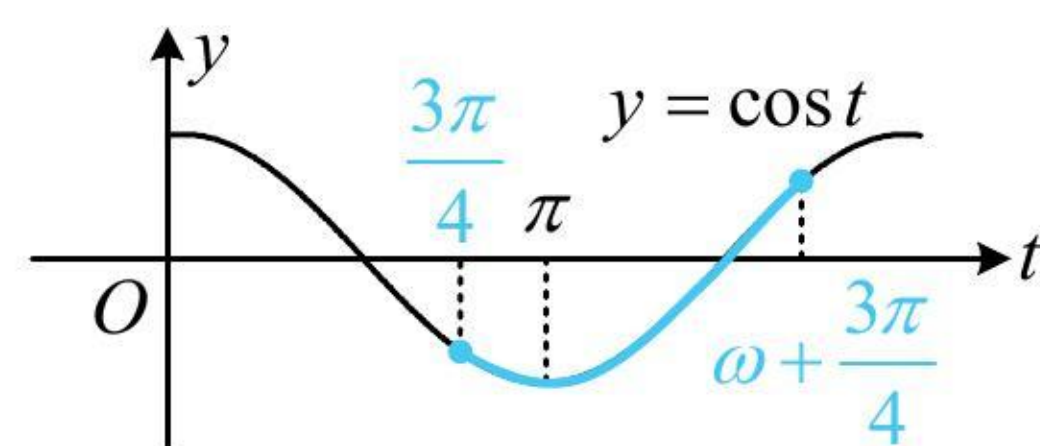
- (A) 有最大值 (B) 有最小值 (C) 单调递增 (D) 单调递减

答案: C

解析: 直接分析 $f(x)$ 的图象不方便, 所以将 $\omega x + \frac{3\pi}{4}$ 换元成 t , 借助 $y = \cos t$ 的图象来分析,

令 $t = \omega x + \frac{3\pi}{4}$, 则 $f(x) = \cos t$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $t \in (\frac{3\pi}{4}, \omega + \frac{3\pi}{4})$, 函数 $y = \cos t$ 的部分图象如图所示,

由图可知 $y = \cos t$ 从 $t = \frac{3\pi}{4}$ 开始必定先 \searrow , 从而 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上必定也要先 \searrow , 故 C 项错误.



9. (2022 · 云南嵩明模拟改 · ★★★★★) 若函数 $f(x) = 2\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3})$ 在区间 $[-a, a] (a > 0)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围为 ()

值范围为 ()

- (A) $(0, \frac{\pi}{3}]$ (B) $(0, \frac{2\pi}{3}]$ (C) $(0, \frac{4\pi}{3}]$ (D) $(0, \frac{5\pi}{3}]$

答案: A

解法 1: 要分析 $f(x)$ 的区间单调性, 可整体换元来看,

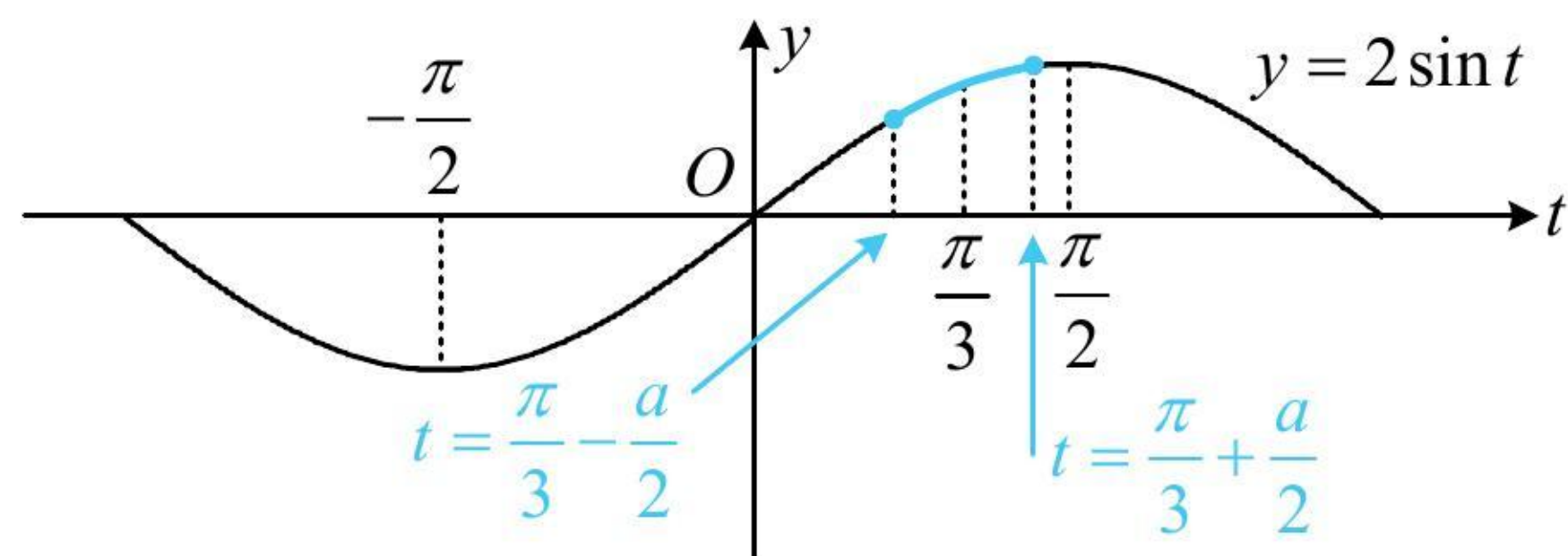
设 $t = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$, 则 $f(x) = 2\sin t$, 且当 $x \in [-a, a]$ 时, $t \in [\frac{\pi}{3} - \frac{a}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{a}{2}]$,

所以问题等价于函数 $y = 2\sin t$ 在 $[\frac{\pi}{3} - \frac{a}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{a}{2}]$ 上单调递增,

该区间左右端点都在变, 怎么分析呢? 注意到 $\frac{\pi}{3}$ 一定在该区间内, 故该区间只能包含于函数 $y = 2\sin t$ 的 $\frac{\pi}{3}$

所在的那一段增区间，即 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ，如图，

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{\pi}{3} - \frac{a}{2} \geq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{3} + \frac{a}{2} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ 结合 } a > 0 \text{ 可得 } 0 < a \leq \frac{\pi}{3}.$$

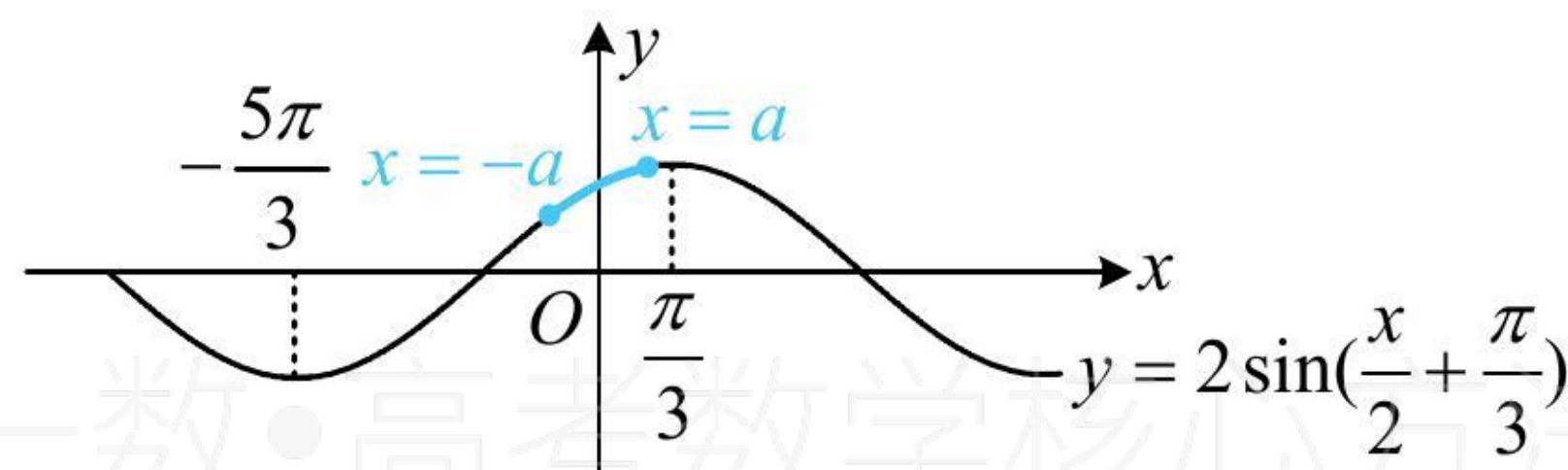


解法 2: 我们发现解析式不含参，故可描出一些关键点，画出该函数的草图，就能分析 a 的范围，

函数 $y = f(x)$ 的部分图象如图，由图可知要使 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上单调递增，应有

$$\begin{cases} a \leq \frac{\pi}{3} \\ -a \geq -\frac{5\pi}{3} \end{cases},$$

结合 $a > 0$ 可得 $0 < a \leq \frac{\pi}{3}$.



【反思】 由于本题函数没有参数，所以解法 2 更简单，但解法 1 是通法，无论是解析式含参，还是区间含参，都可按解法 1 的整体换元处理。

10. (2022 · 江苏模拟改 · ★★★★★) 若 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$ 在 $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ 上单调，则 ω 的取值范围为_____.

答案: $(0, 1]$

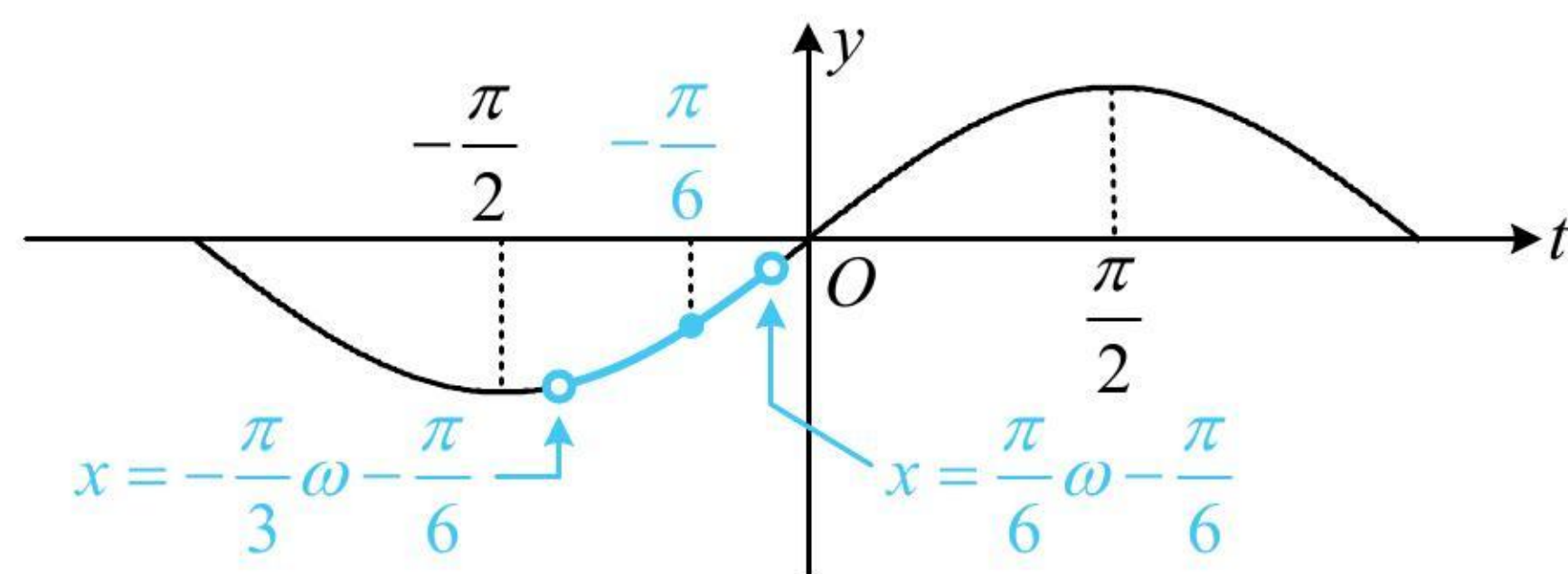
解析: 先将 $\omega x - \frac{\pi}{6}$ 换元成 t ，用 $y = \sin t$ 的图象研究问题，设 $t = \omega x - \frac{\pi}{6}$ ，则 $f(x) = \sin t$ ，

当 $x \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ 时， $t \in (-\frac{\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\omega - \frac{\pi}{6})$ ，问题等价于函数 $y = \sin t$ 在 $(-\frac{\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\omega - \frac{\pi}{6})$ 上单调，

该区间中必有 $-\frac{\pi}{6}$ ，如图，要使 $y = \sin t$ 在该区间单调，则该区间的左端点不能越过 $-\frac{\pi}{2}$ ，右端点不能越过

$\frac{\pi}{2}$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} -\frac{\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{6}\omega - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ 结合 } \omega > 0 \text{ 解得: } 0 < \omega \leq 1.$$



类型III：零点与极值点问题

11. (2023·新高考 I 卷·★★) 已知函数 $f(x) = \cos \omega x - 1 (\omega > 0)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 则 ω 的取值范围是_____.

答案: $[2, 3)$

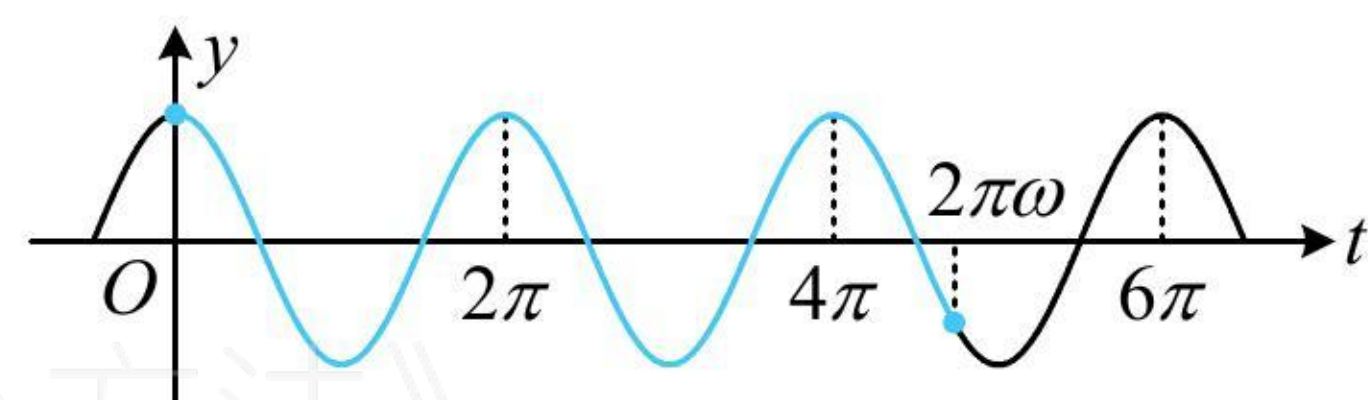
解析: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos \omega x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \omega x = 1$ ①,

为了便于作图, 可将 ωx 换元, 用 $y = \cos t$ 的图象来分析,

令 $t = \omega x$, 则当 $x \in [0, 2\pi]$ 时, $t \in [0, 2\pi\omega]$, 且方程①即为 $\cos t = 1$,

所以问题等价于 $y = \cos t$ 在 $[0, 2\pi\omega]$ 上有 3 个最大值点,

如图, 应有 $4\pi \leq 2\pi\omega < 6\pi$, 解得: $2 \leq \omega < 3$.



《一数·高考数学核心方法》

12. (2022·江西南昌模拟·★★★) 若函数 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$ 在 $(0, \pi)$ 上恰有 1 个极大值点, 无极小值点, 则 ω 的取值范围为_____.

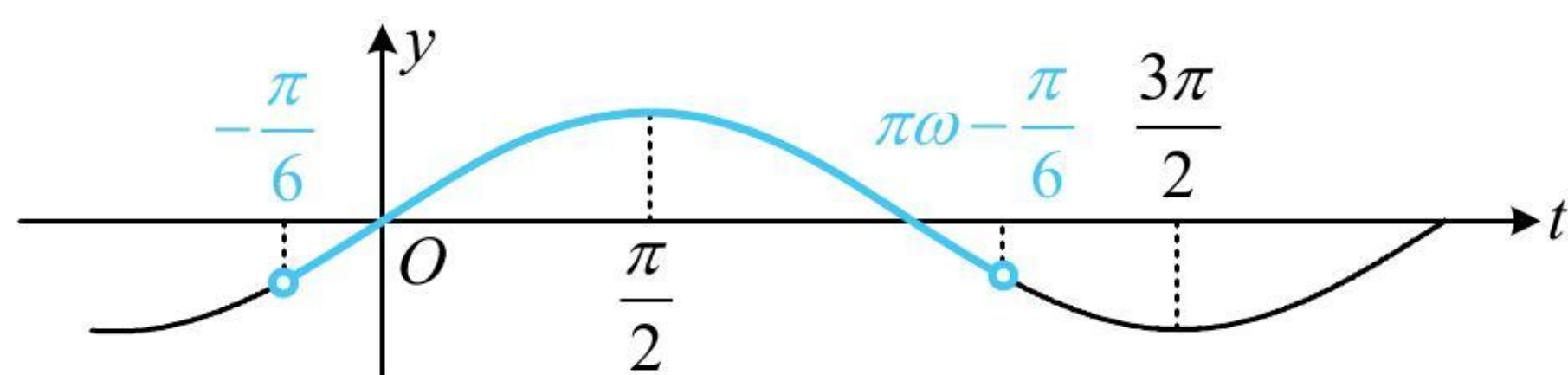
答案: $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}]$

解析: 先将 $\omega x - \frac{\pi}{6}$ 换元成 t , 借助 $y = \sin t$ 的图象来分析问题,

设 $t = \omega x - \frac{\pi}{6}$, 则 $f(x) = \sin t$, 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $t \in (-\frac{\pi}{6}, \pi\omega - \frac{\pi}{6})$,

所以问题等价于 $y = \sin t$ 在 $(-\frac{\pi}{6}, \pi\omega - \frac{\pi}{6})$ 上有 1 个极大值点, 无极小值点,

如图, 右端点 $\pi\omega - \frac{\pi}{6}$ 应介于 $\frac{\pi}{2}$ (不可取) 和 $\frac{3\pi}{2}$ (可取) 之间, 所以 $\frac{\pi}{2} < \pi\omega - \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2}$, 解得: $\frac{2}{3} < \omega \leq \frac{5}{3}$.



13. (2022·河南安阳模拟·★★★) 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi) - 1 (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ 的图象经过原点, 且 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有且仅有一个零点, 则 ω 的最大值为 ()

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{13}{6}$

答案: C

解析: 因为 $f(x)$ 的图象过原点, 所以 $f(0) = 2\cos\varphi - 1 = 0$, 故 $\cos\varphi = \frac{1}{2}$,

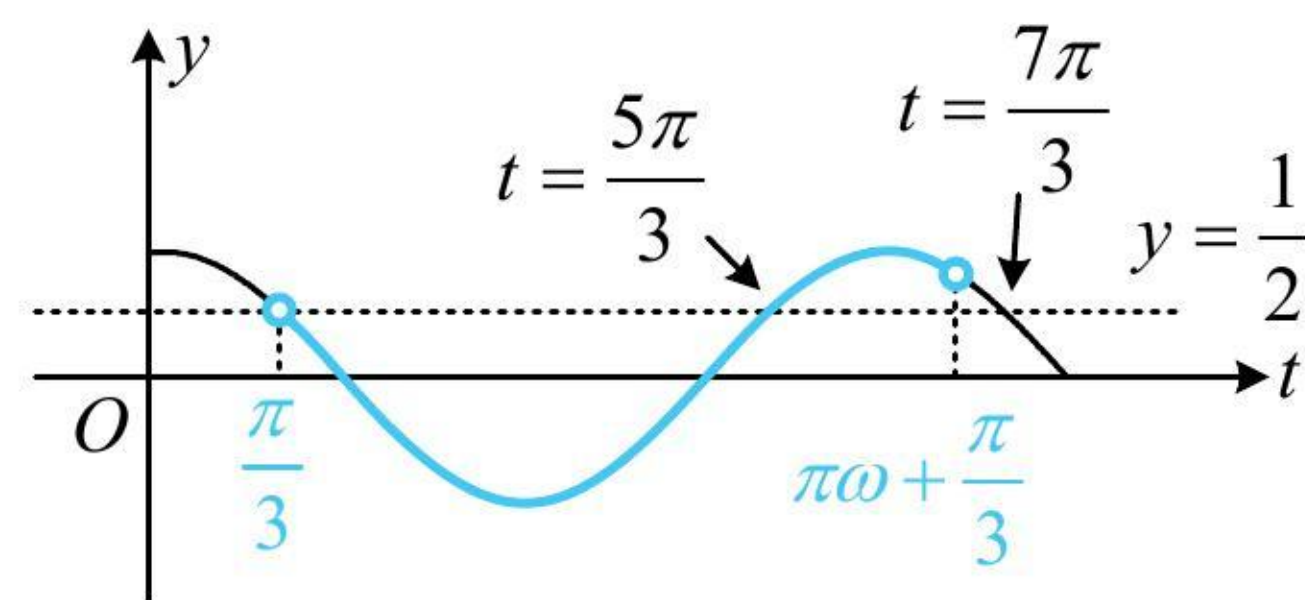
又 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 故 $f(x) = 2\cos(\omega x + \frac{\pi}{3}) - 1$,

要研究 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的零点, 可将 $\omega x + \frac{\pi}{3}$ 换元成 t , 借助 $y = \cos t$ 的图象来分析,

令 $t = \omega x + \frac{\pi}{3}$, 则 $f(x) = 2\cos t - 1$, 所以 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{2}$, 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $t \in (\frac{\pi}{3}, \pi\omega + \frac{\pi}{3})$,

函数 $y = \cos t$ 的部分图象如图所示, 要使方程 $\cos t = \frac{1}{2}$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \pi\omega + \frac{\pi}{3})$ 上有且仅有 1 个解,

应满足 $\frac{5\pi}{3} < \pi\omega + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{3}$, 解得: $\frac{4}{3} < \omega \leq 2$, 所以 $\omega_{\max} = 2$.



类型IV: 代值与条件综合翻译

14. (2022 · 全国乙卷 · ★★) 记函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期为 T , 若 $f(T) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$x = \frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点, 则 ω 的最小值为_____.

答案: 3

解析: 由题意, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $f(T) = \cos(\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} + \varphi) = \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 结合 $0 < \varphi < \pi$ 可得 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

所以 $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$, 又 $x = \frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点, 所以 $f(\frac{\pi}{9}) = \cos(\omega \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{6}) = 0$,

从而 $\omega \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, 故 $\omega = 9k + 3$ ($k \in \mathbf{Z}$), 又 $\omega > 0$, 所以 ω 的最小值为 3.

15. (2023 · 湖南模拟 · ★★★★★) 记函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 T , 若 $\frac{\pi}{4} < T < \frac{\pi}{2}$, 且

$f(x) \leq \left| f(\frac{\pi}{3}) \right|$, 则 $\omega =$ ()

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

答案: D

解析: 条件中有周期的范围, 可由此找到 ω 的范围,

由题意, $\frac{\pi}{4} < T = \frac{2\pi}{\omega} < \frac{\pi}{2}$, 所以 $4 < \omega < 8$ ①,

有了①，只要能建立 ω 的通解，就能求出 ω ，还有 $f(x) \leq \left| f\left(\frac{\pi}{3}\right) \right|$ 这个条件没用，

$$f(x) \leq \left| f\left(\frac{\pi}{3}\right) \right| \Rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ 是 } f(x) \text{ 的最值点} \Rightarrow \omega \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

所以 $\omega = 3k + 1 (k \in \mathbf{Z})$ ，结合①可得 k 只能取2，故 $\omega = 7$ 。

16. (2022·新高考I卷·★★★) 记函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) + b (\omega > 0)$ 的最小正周期为 T ，若 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$ ，

且 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ 中心对称，则 $f(\frac{\pi}{2}) = (\quad)$

- (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3

答案：A

解析：要求 $f(\frac{\pi}{2})$ ，应先求 ω 和 b ，题干所给 T 的范围可翻译成 ω 的范围，

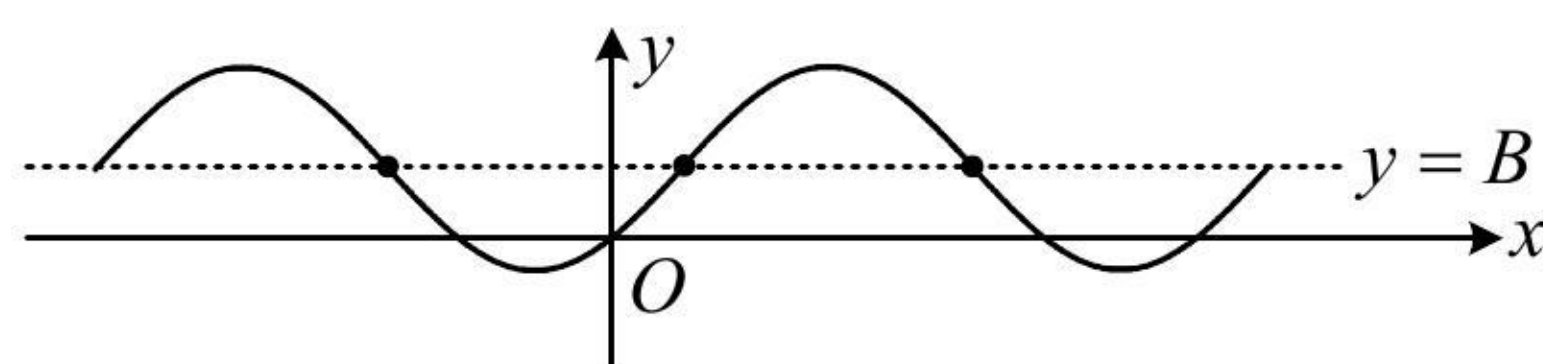
因为 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$ ，所以 $\frac{2\pi}{3} < \frac{2\pi}{\omega} < \pi$ ，故 $2 < \omega < 3$ ，

函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ 中心对称 $\Rightarrow b = 2$ ，(函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ 的对称中心纵坐标是 B)

且 $\omega \cdot \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = k\pi$ ，所以 $\omega = \frac{2}{3}k - \frac{1}{6} (k \in \mathbf{Z})$ ，结合 $2 < \omega < 3$ 可得 $k = 4$ ， $\omega = \frac{5}{2}$ ，故 $f(x) = \sin(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{4}) + 2$ ，

所以 $f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{5}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) + 2 = \sin \frac{3\pi}{2} + 2 = 1$.

【反思】如图，函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ 的对称中心就是图象上能使 $\sin(\omega x + \varphi) = 0$ 的那些点，其横坐标可由 $\omega x + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 来求，纵坐标即为 B 。



17. (2023·四川成都模拟·★★★★) 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{3}$ ，其图

象关于 $(\frac{\pi}{18}, 0)$ 对称，且当 $x \in [\frac{\pi}{6}, m]$ 时， $f(x)$ 的值域为 $[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$ ，则 m 的取值范围为()

- (A) $[\frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{18}]$ (B) $[\frac{2\pi}{9}, \frac{7\pi}{18}]$ (C) $[\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{18}]$ (D) $[\frac{2\pi}{9}, \frac{5\pi}{18}]$

答案：D

解析： $T = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 3$ ，所以 $f(x) = \cos(3x + \varphi)$ ，

又 $f(x)$ 关于 $(\frac{\pi}{18}, 0)$ 对称，所以 $3 \times \frac{\pi}{18} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ，

故 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ ，结合 $0 < \varphi < \pi$ 可得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ，

所以 $f(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{3})$,

要分析 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6}, m]$ 上的值域, 可将 $3x + \frac{\pi}{3}$ 换元成 t , 借助 $y = \cos t$ 的图象来研究,

设 $t = 3x + \frac{\pi}{3}$, 则 $f(x) = \cos t$, 且当 $x \in [\frac{\pi}{6}, m]$ 时,

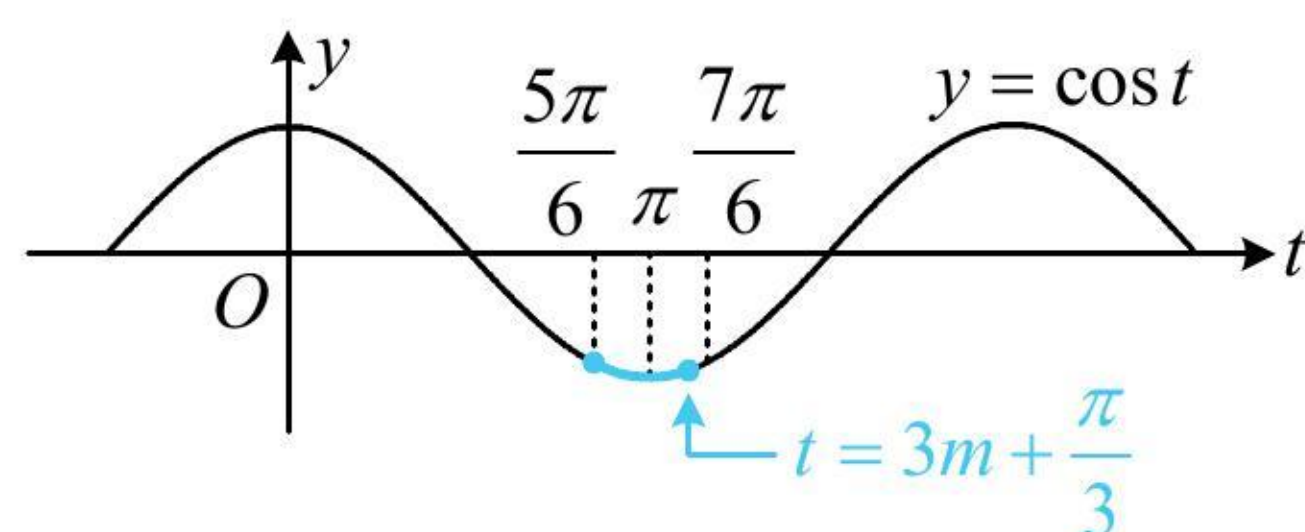
$t \in [\frac{5\pi}{6}, 3m + \frac{\pi}{3}]$, 函数 $y = \cos t$ 的大致图象如图,

注意到 $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以要使 $y = \cos t$ 在

$[\frac{5\pi}{6}, 3m + \frac{\pi}{3}]$ 上的值域为 $[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$,

应有右端点 $3m + \frac{\pi}{3}$ 只能在 π 和 $\frac{7\pi}{6}$ 之间,

即 $\pi \leq 3m + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}$, 解得: $\frac{2\pi}{9} \leq m \leq \frac{5\pi}{18}$.



18. (2022·河南模拟·★★★★) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$), 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6\omega}$

个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象, 若 $g(x)$ 是奇函数, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上单调递增, 则 ω 的最大值为 ()

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) 1 (C) 2 (D) 3

答案: C

解析: 由题意, $g(x) = f(x - \frac{\pi}{6\omega}) = 2\sin[\omega(x - \frac{\pi}{6\omega}) + \varphi] = 2\sin(\omega x + \varphi - \frac{\pi}{6})$,

因为 $g(x)$ 为奇函数, 所以 $g(0) = 2\sin(\varphi - \frac{\pi}{6}) = 0$, 从而 $\sin(\varphi - \frac{\pi}{6}) = 0$, 故 $\varphi - \frac{\pi}{6} = k\pi$,

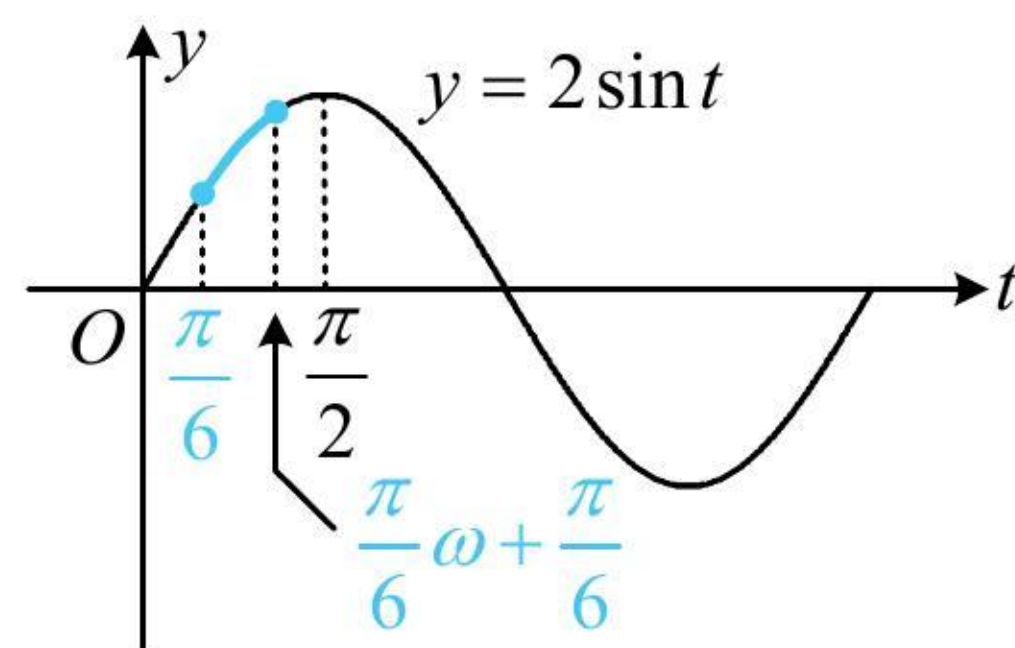
所以 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 又 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 故 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$,

要研究 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上的单调性, 可将 $\omega x + \frac{\pi}{6}$ 换元成 t , 借助 $y = 2\sin t$ 的图象来分析,

令 $t = \omega x + \frac{\pi}{6}$, 则 $f(x) = 2\sin t$, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{6})$ 时, $t \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6})$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上 \nearrow 等价于 $y = 2\sin t$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6})$ 上 \nearrow , 如图,

由图可知, 应有 $\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$, 结合 $\omega > 0$ 可得 $0 < \omega \leq 2$, 故 $\omega_{\max} = 2$.



19. (2023 · 四省联考 · ★★★★★) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 单调, 其中 ω 为正整数, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$,

且 $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3})$.

(1) 求 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴;

(2) 若 $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 φ .

解: (1) (已有函数值相等条件, 看看它们是否在一个周期内, 即可确定中间是否为对称轴)

因为 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 上单调, 所以 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{T}{2}$, 故 $T \geq \frac{2\pi}{3}$, (这就说明 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$ 在一个周期内)

又 $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3})$, 所以 $x = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}) = \frac{7\pi}{12}$ 为 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴.

(2) 由 (1) 知 $T \geq \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} \leq 3$, 结合 $\omega \in \mathbf{N}^*$ 可得 ω 只可能取 1, 2, 3,

(故接下来可讨论 ω , 由于我们要求 φ , 于是先把 (1) 中的对称轴条件翻译出来, 建立关于 φ 的方程)

因为 $x = \frac{7\pi}{12}$ 是 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴, 所以 $\omega \cdot \frac{7\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ①,

若 $\omega = 1$, 则由①可得 $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{12}$, 结合 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ 可得 $\varphi = -\frac{\pi}{12}$,

所以 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{12})$, 此时 $f(\frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{12} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 不合题意;

若 $\omega = 2$, 则由①可得 $\varphi = k\pi - \frac{2\pi}{3}$, 结合 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ 可得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$, 此时 $f(\frac{\pi}{6}) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

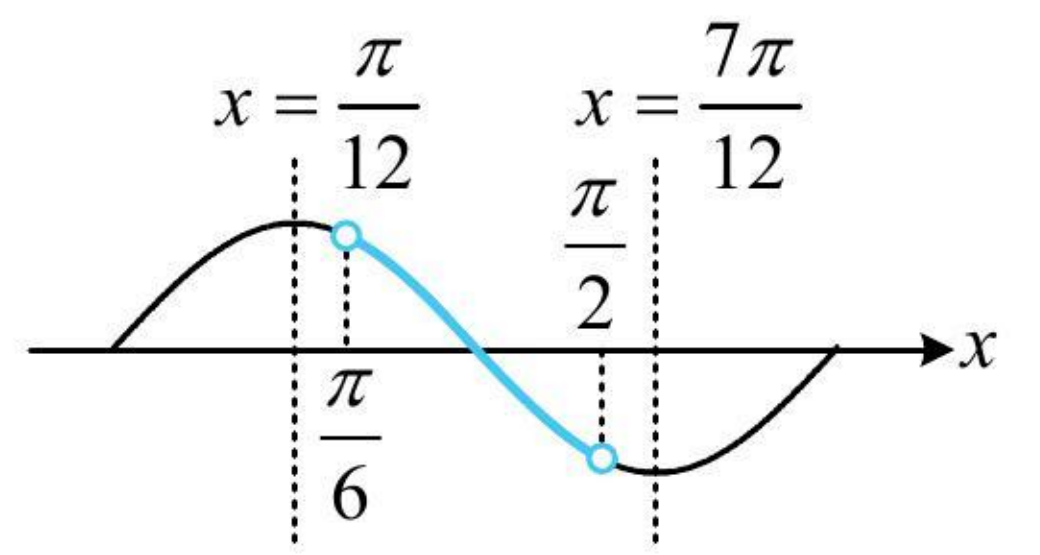
且 $T = \pi$, 所以对称轴 $x = \frac{7\pi}{12}$ 左侧相邻的对称轴为 $x = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}$, 故 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12})$ 上单调, (如图)

因为 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \subseteq (\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12})$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 上单调, 满足题意;

若 $\omega = 3$, 则由①可得 $\varphi = k\pi - \frac{5\pi}{4}$, 结合 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ 可得 $\varphi = -\frac{\pi}{4}$,

所以 $f(x) = \sin(3x - \frac{\pi}{4})$, 此时 $f(\frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{4} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 不合题意;

综上所述, φ 的值为 $\frac{\pi}{3}$.



【反思】 本题的核心也是翻译每一个条件，例如在某区间单调、对称轴、特定点的函数值等，这些条件可以翻译成关于 ω 或 φ 的方程或不等式。回顾本节练习可发现，诸多三角函数图象性质的考题，都是通过翻译条件得到思路。